Формулы сокращенного умножения (ФСУ).

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
3) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;
4) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;
5) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
6) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
7) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
8) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
9) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Степени и корни.

10) $a^0=1$; **11)** $a^1=a$; **12)** $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
13) $a^m:a^n=a^{m-n}$;
14) $(a^m)^n=a^{mn}$; **15)** $(ab)^n=a^n\cdot b^n$;
16) $(\ -)^n=a^n:b^n$;
17) $a^{-n}=\frac{}{n}$; **18)** $(\frac{a}{})^{-n}=(\frac{b}{})^n$.
19) $\sqrt{a^2}=|a|$;
20) $(\sqrt{a})^2=a$;
21) $\sqrt{a}=a^{\bar{2}}$; **22)** $\sqrt[3]{a}=a^{\bar{3}}$; **23)** $\sqrt[3]{a^2}=a^{\bar{3}}$.
24) Бином Ньютона.
$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots$
$+\quad a^{n-k}b^k+\ldots+b^n$.
Здесь $C_n^1=n$; $\quad =\frac{}{}$; $\quad =\frac{}{}$
25) $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$ –это (k+1)-й член бинома $(a+b)^n$.

Комбинаторика.

26) Факториал $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot n$.
27) Перестановки $P_n=n!$
28) Размещения $\quad =\frac{}{}$;
29) Сочетания $\quad =\frac{}{}$.
30) Свойства сочетаний: $\quad =C\quad$; $\quad =C_n^m+C_n^{m+1}$.

Решение неполных квадратных уравнений.

31) Если $ax^2+c=0$, то $x=\pm\sqrt{\quad -}$, при $-\ - >0$;
32) Если $ax^2+bx=0$, то $x(ax+b)=0$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=-\ -$.

Решение полных квадратных уравнений.

33) $ax^2+bx+c=0$. При нечетном b дискриминант $D=b^2-4ac$.
Если $D>0$, то $x_1=\frac{-\sqrt{D}}{}$; $\quad x_2=\frac{+\sqrt{D}}{}$. Если $D=0$, то $x_1=x_2=-\ \frac{}{}$.
Если $D<0$, то действительных корней нет.
34) $ax^2+bx+c=0$. При четном b дискриминант
$D_1=(-)^2-ac$. Если $D_1>0$, то $x_1=\frac{--\sqrt{D}}{}$; $x_2=\frac{-+\sqrt{D}}{}$.
Если $D_1=0$, то $x_1=x_2=-\ \frac{}{}$.
Если $D_1<0$, то действительных корней нет.

Метод коэффициентов для решения уравнения $ax^2+bx+c=0$.

35) Если $a+b+c=0$, то $x_1=1$, $x_2=-$;
36) Если $a-b+c=0$, то $x_1=-1$, $x_2=\quad -$.

37) Формула разложения квадратного трехчлена на линейные множители.
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 –корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

38) Теорема Виета для полного квадратного уравнения

$ax^2+bx+c=0$. $(D>0)$ $\quad x_1+x_2=-\ -$; $\quad x_1\cdot x_2=-$.

39) Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения.
$x^2+px+q=0$. $(D>0)$ $\quad x_1+x_2=-p$; $\quad x_1\cdot x_2=q$.

Квадратичная функция.

40) Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ (или $y=a(x-m)^2+n$) служит парабола. Ветви параболы направлены вверх при $a>0$ и направлены вниз при $a<0$.

41) Вершина параболы O'(m; n), где $m=-\frac{}{}$; $n=y(m)$. **42)** Если дискриминант $D=b^2-4ac>0$, то парабола пересечет ось Ox в двух точках $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$. Если $D=0$, то парабола касается оси Ox в точке $x=-\frac{}{}$. Если $D<0$, то парабола не пересекает ось Ox.

Прогрессии.

43) Арифметическая прогрессия: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$. Здесь $a_2=a_1+d$; $a_3=a_2+d$; $a_4=a_3+d$; … , $a_n=a_{n-1}+d$,…, где d – разность арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

44) Геометрическая прогрессия: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots, b_n, \ldots$. Здесь $b_2=b_1\cdot q$; $b_3=b_2\cdot q$; $b_4=b_3\cdot q$; … ; $b_n=b_{n-1}\cdot q$, где q- знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$.

45) Формула n-го члена арифметической прогрессии. $a_n=a_1+(n-1)d$.

46) Свойства арифметической прогрессии.

1) $a_n=(a_{n-1}+a_{n+1}):2$; 2) $a_n=(a_{n-k}+a_{n+k}):2$.

47) Формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

1) $S_n=(a_1+a_n)\cdot n/2$; 2) $S_n=$ ———— $\cdot n$.

48) Формула n-го члена геометрической прогрессии. $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$.

49) Свойства геометрической прогрессии.

1) $\quad=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$; 2) $b_n^2=b_{n-k}\cdot b_{n+k}$.

50) Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.

$S_n=$ ——— или $S_n=$ ——— , где $q\neq 1$;

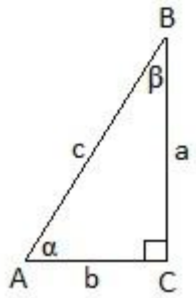
51) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. ($|q|<1$). S= ——.

52) Перевод бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.

Бесконечная периодическая десятичная дробь равна обыкновенной дроби, в числителе которой разность между всем числом после запятой и числом после запятой до периода дроби, а знаменатель состоит из «девяток» и «нулей», причем, «девяток» столько, сколько цифр в периоде, а «нулей» столько, сколько цифр после запятой до периода дроби.

53) Пример. 2,41(6) = 2——— = 2—— = 2—.

54) Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника. ($\alpha+\beta=90°$)



sinα= –

(————————————

cosα= –

(——————————)

tgα= – (——————————)

ctgα= – (——————————)

55) sinβ= –; cosβ= –; tgβ= –; ctgβ= –.

Имеем: sinβ=cosα; cosβ=sinα; tgβ=ctgα; ctgβ=tgα

Так как β=90°-α, то

56) sin(90°-α)=cosα; **57)** cos(90°-α)=sinα;

58) tg(90°-α)=ctgα; **59)** ctg(90°-α)=tgα.

Кофункции углов, дополняющих друг друга до 90°, равны между собой.

Основные тригонометрические тождества.

60) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; **61)** $\sin\alpha=\pm\sqrt{\qquad}$;

62) $\cos\alpha=\pm\sqrt{\qquad}\alpha$;

63) tgα= ——; **64)** ctgα= —— ;

65) secα= ——; **66)** cosecα= ——;

67) tgα·ctgα=1; **68)** $tg^2\alpha+1=$ ——;

69) $ctg^2\alpha+1=$ ——

Формулы сложения.

70) sin(α+β)=sinα·cosβ+cosα·sinβ;

71) sin(α-β)=sinα·cosβ-cosα·sinβ;

72) cos(α+β)=cosα·cosβ-sinα·sinβ;

73) cos(α-β)=cosα·cosβ+sinα·sinβ;

74) tg(α+β)= ————

75) ctg(α+β)=————;

76) tg(α-β)= ———— ;

77) ctg(α-β)= ————.

Формулы двойного аргумента.

78) sin2α=2sinαcosα; **79)** $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

80) tg2α = ———; **81)** ctg2α = ——;

82) $1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$; **83)** $1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$.

Формулы тройного аргумента.

84) $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

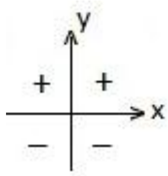
85) $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

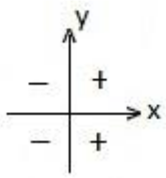
86) tg3α= ————.

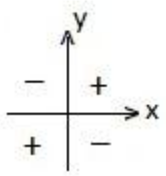
87) Синус и косинус любого угла.

88) Из тригонометрических функций четная только одна: y=cosx, остальные три – нечетные, т. е. cos(-α)=cosα; sin(-α)=-sinα; tg(-α)=-tgα; ctg(-α)=-ctgα.

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям.







89) знаки синуса. **90)** знаки косинуса. **91)** знаки тангенса и котангенса.

92) Значения тригонометрических функций некоторых углов.

Аргумент	Функция			
	sinα	cosα	tgα	ctgα
0°	0	1	0	-
30° = –	—	$\frac{\sqrt{3}}{}$	$\frac{\sqrt{3}}{}$	$\sqrt{3}$
45° = –	$\frac{\sqrt{2}}{}$	$\frac{\sqrt{2}}{}$	1	1
60° = –	$\frac{\sqrt{3}}{}$	_	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{}$
90° = –	1	0	-	0
180° = π	0	-1	0	-
270° = —	-1	0	-	0
360° = 2π	0	1	0	-

93) 1 радиан – величина центрального угла, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу данной окружности. 1 рад.≈57°.

94) Перевод градусной меры угла в радианную.

α°=α°· ——.

95) Перевод радианной меры угла в градусную.

β=β· ——.

96) Формулы приведения.

Мнемоническое правило:

1. Перед приведенной функцией ставят знак приводимой.
2. Если в записи аргумента – (90°) взято нечетное число раз, то функцию меняют на кофункцию.

Угол	Функция			
	sinx	cosx	tgx	ctgx
α	sinα	cosα	tgα	ctgα
-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
90°-α	cosα	sinα	ctgα	tgα
90°+α	cosα	-sinα	-ctgα	-tgα
180°-α	sinα	-cosα	-tgα	-ctgα
180°+α	-sinα	-cosα	tgα	ctgα
270°-α	-cosα	-sinα	ctgα	tgα
270°+α	-cosα	sinα	-ctgα	-tgα
360°-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
360°+α	sinα	cosα	tgα	ctgα

Формулы преобразования суммы (разности) в произведение.

97) sin α+sinβ=2sin—— cos——;

98) sin α-sinβ=2sin—— cos——;

99) cosα+cosβ=2cos—— cos——;

100) cosα-cosβ= - 2sin——sin——

101) tgα + tgβ = ————;

102) tgα - tgβ = ————;

103) ctgα+ctgβ = ————;

104) ctgα-ctgβ = - ————

Формулы преобразования произведения в сумму (разность).

105) sinx·siny = – (cos(x-y) – cos(x+y));

106) sinx·cosy = – (sin(x+y) + sin(x-y));

107) cosx·siny = – (sin(x+y) – sin(x-y));

108) cosx·cosy = – (cos(x+y)+cos(x-y)).

Формулы половинного аргумента.

109) tg— = ———; **110)** tg— = ———; **111)** ctg— = ———; **112)** ctg— = ———; **113)** tg^2— = ———; **114)** tgα = ——— .	**115)** sin^2— = ———; **116)** cos^2— = ——— **117)** sinα = ——— **118)** cosα = ———.

Обратные тригонометрические функции.

119) Арксинусом числа a (arcsin a) называется угол из промежутка [- —; —], синус которого равен a. Примеры:

а) arcsin — = —, так как sin— = —;

б) arcsin(- —) =- — , т. к. sin(- —)= - sin— = - —.

arcsin(-a)=- arcsin a.

120) Арккосинусом числа a (arccos a) называется угол из промежутка [0; π], косинус которого равен a. Примеры:

а) arccos — = —, так как cos — = —;

б) arccos(- —)= ——, так как cos —— =cos(π - —)=

= - cos —=- —.

arccos(-a)=π – arccosa.

121) Арктангенсом числа a (arctg a) называется угол из промежутка (- —; —), тангенс которого равен a.

Примеры: а) arctg 1 = —, так как tg — = 1;

б) arctg(-1)= - —, так как tg(- —)= - tg — = - 1.

arctg(-a)=- arctg a.

122) Арккотангенсом числа a (arcctg a) называется угол из промежутка (0; π), котангенс которого равен a.

Примеры: а) arcctg 1 = —, так как ctg — = 1;

б) arcctg(-1)= ——, так как ctg —— = ctg(π – —)=

= - ctg —= -1. **arcctg(-a)=π – arcctg a.**

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Общие формулы.

123) sin t=a, 0<a<1 t=$(-1)^n$ ·arcsin a + πn, nϵZ	**124)** sin t = - a, 0<a<1 t=$(-1)^{n+1}$·arcsin a +πn, nϵZ
125) cos t=a, 0<a<1 t=±arccos a +2πn, nϵZ	**126)** cos t =-a, 0<a<1 t=±(π-arccos a)+2πn, nϵZ
127) tg t =a, a>0 t=arctg a + πn, nϵZ	**128)** tg t =-a, a>0 t= - arctg a + πn, nϵZ
129) ctg t=a, a>0 t=arcctg a + πn, nϵZ	**130)** ctg t= -a, a>0 t=π – arcctg a + πn, nϵZ

Частные формулы.

131) sin t =0 t=πn, nϵZ	**132)** sin t=1 t= — +2πn, nϵZ	**133)** sin t= -1 t= - — +2πn, nϵZ
134) cos t=0 t= — + πn, nϵZ	**135)** cos t=1 t=2πn, nϵZ	**136)** cos t=-1 t=π +2πn, nϵZ
137) tg t =0 t = πn, nϵZ	**138)** ctg t=0 t = — +πn, nϵZ	

Решение простейших тригонометрических неравенств.

139) sint<a (|a|<1), -π-arcsina+2πn<t<arcsina+2πn, nϵZ. **140)** sint>a (|a|<1), arcsina+2πn<t<π-arcsina+2πn, nϵZ. **141)** cost<a (|a|<1), arccosa+2πn<t<2π-arccosa+2πn, nϵZ. **142)** cost>a (|a|<1), -arccosa+2πn<t<arccosa+2πn, nϵZ.	**143)** tgt<a, - —+πn<t<arctga+πn, nϵZ. **144)** tgt>a, arctga+πn<t<—+πn, nϵZ. **145)** ctgt<a, arcctga+πn<t<π+πn, nϵZ. **146)** ctgt>a, πn<t<arcctga+πn, nϵZ.

Прямая на плоскости.

147) Общее уравнение прямой: $Ax+By+C=0$.

148) Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=kx+b$ (k – угловой коэффициент).

149) Острый угол между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется по формуле: $tg\alpha=|$——— $|$.

150) $k_1=k_2$ - условие параллельности прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.

151) $k_2=-$ — - условие перпендикулярности прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.

152) Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k, и проходящей через точку $M(x_1; y_1)$, имеет вид: $y-y_1=k(x-x_1)$. Отсюда: $k=$ ——.

153) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ имеет вид:

—— = ——.

154) Длина отрезка M_1M_2 с концами в точках $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

$|M_1M_2|=\sqrt{(\qquad\qquad}$.

155) Координаты точки $M(x_0; y_0)$ – середины отрезка M_1M_2.

$x_0=$ ——; $y_0=$ ——.

156) Координаты точки $C(x; y)$, делящей в заданном отношении λ отрезок M_1M_2 между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

$x=$ ——; $y=$ ——.

157) Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$.

$d=\left|\frac{\qquad}{\sqrt{\qquad}}\right|$.

Уравнение окружности.

158) Окружность с центром в начале координат: $x^2+y^2=R^2$, R – радиус окружности.

159) Окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом R: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Векторы в пространстве. (имеют на одну координату больше - просто уберите последнюю координату a_3 (b_3 или z) в каждой формуле и вы получите векторы на плоскости).

160) Если $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ $(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$.

161) Длина (модуль) вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{\qquad\qquad}$.

162) Если $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то $|\vec{a}|=\sqrt{\qquad\qquad}$.

163) $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Если $\vec{a}=\vec{b}$, то $a_1=b_1$; $a_2=b_2$; $a_3=b_3$.

164) $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Если $\vec{c}=\vec{a}\pm\vec{b}$, то $(a_1\pm b_1; a_2\pm b_2; a_3\pm b_3)$.

165) Умножение вектора на скаляр. $\lambda\vec{a}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

166) $\lambda(\vec{a}\pm\vec{b})=\lambda\vec{a}\pm\lambda\vec{b}$.

167) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ - условие перпендикулярности векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$.

168) Условие коллинеарности векторов:

— = — = —.

169) Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\hat{}\vec{b})$.

170) Косинус угла между векторами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$:

$\cos(\vec{a}\hat{}\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ или

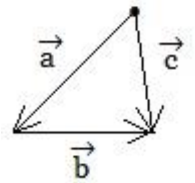
$\cos(\vec{a}\hat{}\vec{b})=\frac{\qquad}{\sqrt{a\qquad}\sqrt{b\qquad}}$.

171) Любой вектор $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ в пространстве можно разложить по трем взаимно перпендикулярным единичным векторам (ортам) $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$. Тогда $\vec{a}=a_1\cdot\vec{\imath}+a_2\cdot\vec{\jmath}+a_3\cdot\vec{k}$.

172) $\vec{a})^2=|\vec{a}|^2$. **173)** $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a})^2}$.

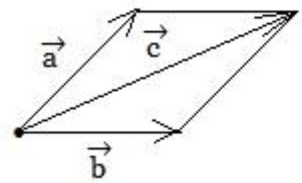
Сложение векторов на плоскости.

174) Правило треугольника.



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$; $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$.

175) Правило параллелограмма.

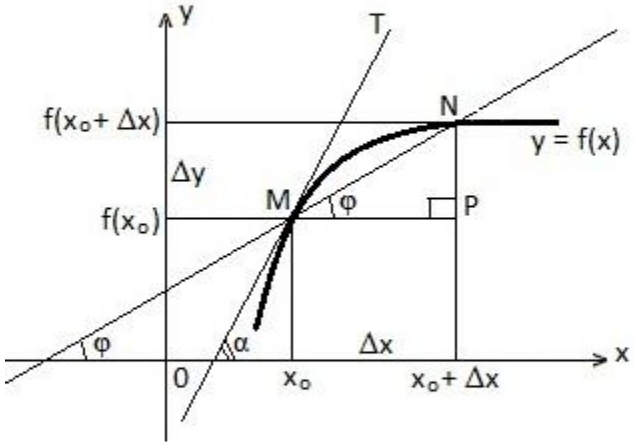


$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

Пределы.

176) Постоянная величина **а** называется пределом переменной величины **х**, если эта переменная **х** при своем изменении неограниченно приближается к **а**. **177)** Предел постоянной величины равен самой постоянной величине. **178)** Постоянный множитель можно вынести за знак предела. **179)** lim(u±v)=lim u±lim v; **180)** lim(uv)=lim u·lim v; **181)** lim – = —— .	**182)** —— = 1; **183)** —— = 1; **184)** (–) = e; **185)** = e.

Производная. Производная есть скорость изменения функции в точке x.



186) Определение производной.

y'=f '(x₀)=lim — = ————.

187) Уравнение касательной (МТ) к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x₀ имеет вид: y=f(x₀)+f '(x₀)(x-x₀).

188) Геометрический смысл производной:
f '(x₀)=tgα=k,
где α – угол между касательной (МТ) к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x₀ и положительным направлением оси Ох;
k – угловой коэффициент касательной.

189) Физический смысл производной:
если функция y=x(t)описывает путь, по которому прямолинейно движется некоторая точка, то скорость движения этой точки v(t)=x'(t), а ее ускорение a(t)=v'(t).

190) Отыскание производной называется дифференцированием функции.

Основные правила дифференцирования.

Пусть С – постоянная, u=u(x), v=v(x) – функции, имеющие производные.

191) C'=0; **192)** x'=1; **193)** (u±v)'=u'±v';

194) (Cu)'=C·u'; **195)** (uv)'=u'v+uv';

196) (–)'=———; **197)** (–)′= - —$_2$.

198) Если y=f(u), u=u(x), т. е. y=f(u(x)), где функции f(u) и u(x) имеют производные, то $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

Формулы дифференцирования.

199) $(x^n)'=nx^{n-1}$; **200)** $(\sqrt{x})'=\frac{}{2\sqrt{x}}$;

201) (–)'=- —$_2$; **202)** (—$_n$)'=- ——;

203) $(\sqrt[n]{x})'=\frac{}{\sqrt{x}}$;

204) $(\frac{}{\sqrt{x}})'= - \frac{}{x\sqrt{x}}$; **205)** $(\frac{}{\sqrt[n]{x}})'= - \frac{}{\sqrt{x}}$;

206) (sinx)'=cosx; **207)** (cosx)'=-sinx;

208) (tgx)'=——; **209)** (ctgx)'= - ——;

210) $(e^x)'=e^x$; **211)** $(a^x)'=a^x\ln a$; **212)** (lnx)'=–;

213) (x)'= ——; **214)** (arcsinx)'= $\frac{}{\sqrt{}}$;

215) (arccosx)'=- $\frac{}{\sqrt{}}$;

216) (arctgx)'= ——; **217)** (arcctgx)'=- —— .

218) Функция - соответствие, при котором каждому числу **x** из множества **D** сопоставляется по некоторому правилу число **y**, зависящее от **x**.

219) Областью определения функции y=f(x) (обозначают через D(y)), считают множество всех значений переменной, при которых выражение f(x) имеет смысл.	**220)** Областью значений функции (E(y)) считают множество всех значений f(x), где xϵD(y).

221) Функция f называется четной, если вместе с каждым значением переменной x из области определения функции значение (-x) также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство: $f(-x)=f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Оу.

222) Функция f называется нечетной, если вместе с каждым значением переменной x из области определения функции значение (-x) также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство: $f(-x)= - f(x)$. График симметричен относительно начала координат.

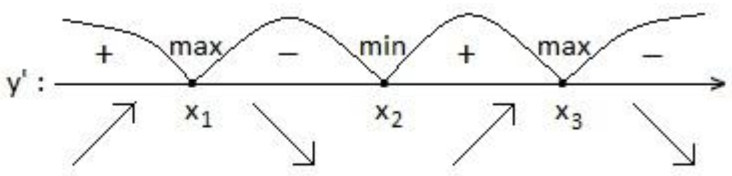
223) Функцию f называют периодической с периодом $T\neq 0$, если для любого x из области определения значения этой функции в точках x, x-T, x+T равны, т. е. выполняется равенство: $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.

Определение периода функции.
224) Если функция f периодическая и имеет период T, то функция $Af(kx+b)$, где A, k и b постоянны, а $k\neq 0$, также периодична, причем ее период $T_0 = \frac{T}{|k|}$.

225) Нахождение функции, обратной данной.
1)Выразить переменную **x** через **y**;
2)В полученном равенстве вместо **x** написать **y**, а вместо **y** написать **x**.

Примечания.
226) Графики взаимно обратных функций f(x) и g(x) симметричны относительно прямой y=x (биссектрисы I и III координатных углов).
227) Область определения данной функции станет областью значений для обратной функции, а область значений данной функции станет областью определения для обратной функции: $D(f)\rightarrow E(g)$; $E(f)\rightarrow D(g)$.

228) Критическими точками функции называют внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует.
229) Возрастание, убывание и экстремумы функции (на примере некоторой функции, см. рис.)



x_1, x_2, x_3 – критические точки функции.
Примечание: $y''(x_1)<0$ и $y''(x_3)<0$; $y''(x_2)>0$.
230) Если вторая производная в критической точке x_1 отрицательна, то данная функция в этой критической точке имеет максимум.
231) Если вторая производная в критической точке x_2 положительна, то данная функция в этой критической точке имеет минимум.
232) Если экстремумы находят с помощью второй производной, а вторая производная в критической точке окажется равной нулю, то исследования функции нужно продолжать с помощью первой производной.

233) Если f(x) и g(x) являются взаимно обратными функциями, и если существуют $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, то $g'(x_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.
234) Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции y=f(x) на отрезке [a; b], нужно найти значения этой функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые принадлежат данному отрезку, а затем из всех полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.
235) Схема исследования функции.
1) область определения D(f);
2) четность (нечетность); периодичность; 3) точки пресечения графика с осями координат;
4) промежутки знакопостоянства;
5) промежутки возрастания и убывания; 6) точки экстремума и значения функции в этих точках;
7) поведение функции в окрестности каждой «особой» точки и при больших по модулю значениях x.

Корень n-й степени.

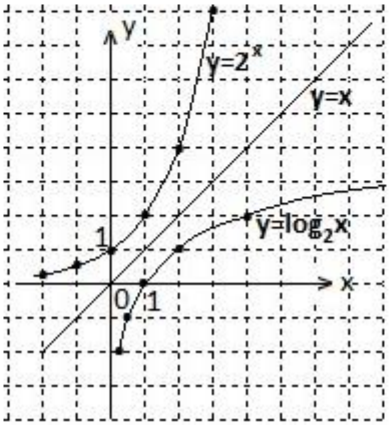
236) Неотрицательное значение корня n-й степени из неотрицательного числа называется арифметическим корнем. $x=\sqrt[n]{a}$, если $x^n=a$.
237) Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называются иррациональными. При решении иррациональных уравнений их корни всегда рассматриваются как арифметические

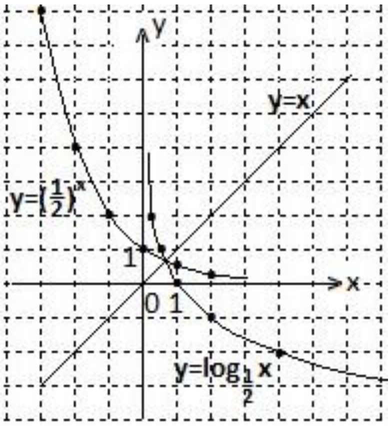
Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:
238) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$; **239)** $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;
240) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $(b\neq0)$
241) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; **242)** $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$;
243) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$. $(k>0)$

Показательная и логарифмическая функции.

244) Функцию вида $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq1$, x – любое число, называют показательной. Область определения показательной функции $D(y)=R$, область значений $E(y)=R_+$
245) При $a>1$ функция $y=a^x$ возрастает; при $0<a<1$ функция $y=a^x$ убывает.
Для показательной функции справедливы все свойства степенной функции:
246) $a^1=a$; **247)** $a^0=1$;
248) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$; **249)** $a^x:a^y=a^{x-y}$;
250) $(a^x)^y=a^{xy}$; **251)** $(ab)^x=a^x\cdot b^x$;
252) $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$;
253) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$; **254)** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\left(\frac{b}{a}\right)^x$
255) Функцию, обратную показательной, называют логарифмической и записывают $y=\log_a x$. Область определения логарифмической функции $D(y)=R_+$, область значений $E(y)=R$.
256) При $a>1$ функция $y=\log_a x$ возрастает; при $0<a<1$ функция $y=\log_a x$ убывает.

257) $y=2^x$ и $y=\log_2 x$; **258)** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.





259) Логарифмом числа b по основанию a (пишут $\log_a b$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Так $\log_a b=n$, если $a^n=b$.
260) Под знаком логарифма ($\log_a x$) могут быть только положительные числа, т. е. $a>0$, $x>0$, $a\neq1$.
261) Десятичный логарифм: $\log_{10} a=\lg a$.
262) Натуральный логарифм $\log_e a=\ln a$, $(e\approx2{,}72)$.
263) $a^{\log_a b}=b$; **263а)** $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$;
264) $\log_a a=1$; **265)** $\log_a 1=0$; **266)** $\log_a x^m=m\cdot\log_a x$;
267) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$; **268)** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;
269) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$; **270)** $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$; **271)** $\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b$;
272) $\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b$; **273)** $\log_{a^r} b^r=\log_a b$;
274) $k=\log_a a^k$.

275) Степени некоторых простых чисел.

$2^0=1$	$2^8=256$	$3^0=1$	$5^0=1$	$7^0=1$	$11^0=1$
$2^1=2$	$2^9=512$	$3^1=3$	$5^1=5$	$7^1=7$	$11^1=11$
$2^2=4$	$2^{10}=1024$	$3^2=9$	$5^2=25$	$7^2=49$	$11^2=121$
$2^3=8$	$2^{11}=2048$	$3^3=27$	$5^3=125$	$7^3=343$	$11^3=1331$
$2^4=16$	$2^{12}=4096$	$3^4=81$	$5^4=625$	$7^4=2401$	$11^4=14641$
$2^5=32$	$2^{13}=8192$	$3^5=243$	$5^5=3125$	$7^5=16807$	
$2^6=64$	$2^{14}=16384$	$3^6=729$	$5^6=15625$		
$2^7=128$		$3^7=2187$			

Первообразная и интеграл.

276) Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.
277) Любая первообразная для функции f(x) на заданном промежутке может быть записана в виде F(x)+C, где F(x)– одна из первообразных для функции f(x), а C – произвольная постоянная.
278) Совокупность всех первообразных F(x)+C функции f(x) на рассматриваемом промежутке называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$, где f(x) – подынтегральная функция, f(x)dx - подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Основные свойства неопределенного интеграла.

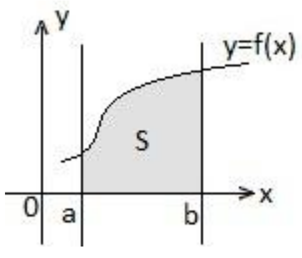
279) $(\int f(x)dx)' = f(x)$; **280)** $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
281) $\int dF(x) = F(x) + C$ или $\int F'(x)dx = F(x) + C$;
282) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;
283) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
284) $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$.

Таблица интегралов.

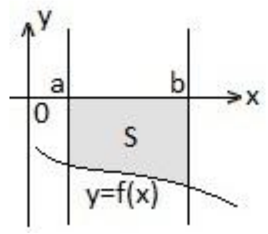
285) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, при $n \neq -1$;
286) $\int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C$;
287) $\int du = u + C$; **288)** $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$;
289) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$; **290)** $\int \cos u\, du = \sin u + C$;
291) $\int \sin u\, du = -\cos u + C$;
292) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$;
293) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$;
294) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$;
295) $\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{arctg}\, u + C$;
296) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; **297)** $\int e^u du = e^u + C$;
298) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
299) Если F(x) – первообразная для f(x) на [a; b], то $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.
Здесь $\int_a^b f(x)dx$ – определенный интеграл.
300) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ – формула Ньютона-Лейбница.

Площадь криволинейной трапеции (301 – 305).

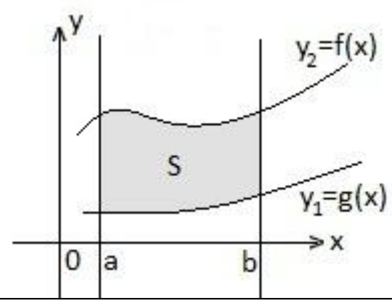
301) $S=\int_a^b f(x)dx$



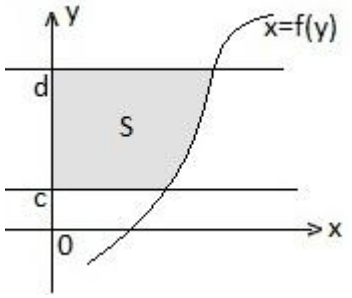
302) $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$



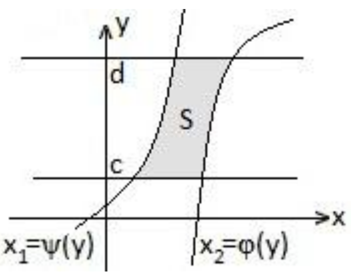
303) $S=\int_a^b (y_2 - y_1)dx$



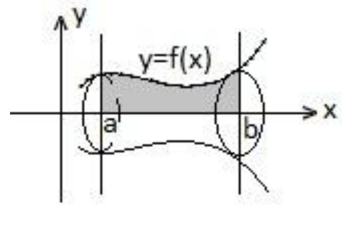
304) $S=\int_c^d f(y)dy$



305) $S=\int_c^d (x_2 - x_1)dy$



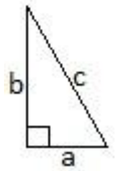
306) Объем тела вращения
$V=\pi\int_a^b (f(x))^2dx$



Треугольники.

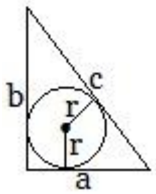
Теорема Пифагора.

307) $a^2+b^2=c^2$



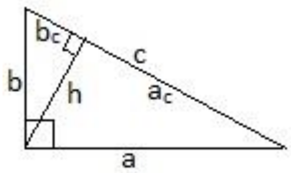
308) $S_\Delta=\frac{1}{2}a\cdot b$

309) $2r=a+b-c$



r – радиус вписанной окружности

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.



310) $h^2=a_c\cdot b_c$;

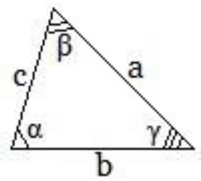
311) $a^2=c\cdot a_c$;

312) $b^2=c\cdot b_c$.

313) $S_\Delta=\frac{1}{2}c\cdot h$, где c - гипотенуза, h – высота, проведенная к гипотенузе

314) Теорема синусов.

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$, где R-радиус описанной окружности.



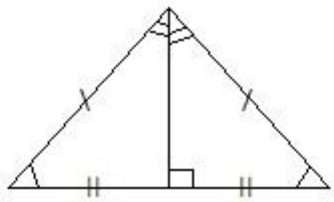
315) Теорема косинусов.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$;

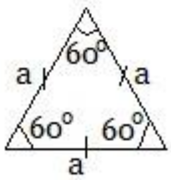
316) $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

317) Свойства равнобедренного треугольника.

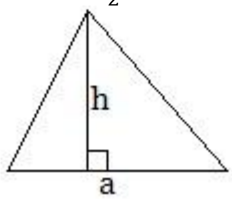
В равнобедренном треугольнике (*длины боковых сторон равны*) высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.



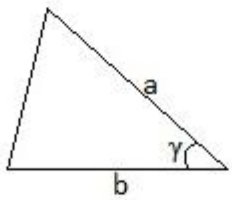
318) $S_\Delta=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

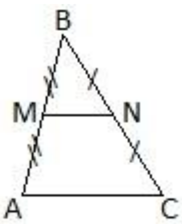


319) $S_\Delta=\frac{1}{2}ah$



320) $S_\Delta=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$

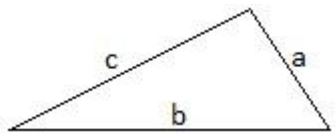




321) $MN=\frac{AC}{2}$

MN- средняя линия ΔABC

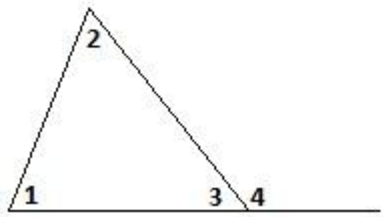
322) Формула Герона.



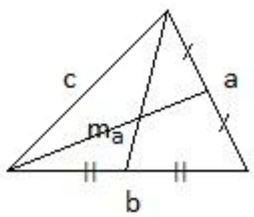
$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p=\frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр

323) Сумма внутренних углов любого треугольника составляет 180°, т. е. $\angle1+\angle2+\angle3=180°$.



324) Внешний угол треугольника ($\angle4$) равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, т. е. $\angle4=\angle1+\angle2$.

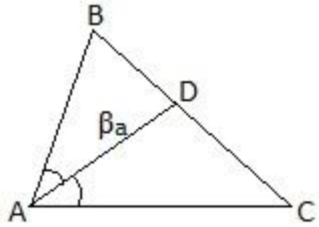


325) Центр тяжести треугольника - точка пересечения медиан, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

326) $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ - длина медианы, проведенной к стороне а.

327) Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, площадь каждого из этих двух треугольников равна половине площади данного треугольника.

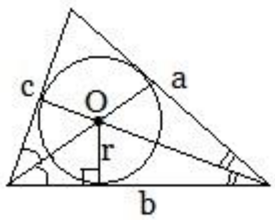
328) Биссектриса угла любого треугольника делит противоположную сторону на части, соответственно пропорциональные боковым сторонам треугольника. $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$. **329)** если AD=$\beta_a$, BC=a, AC=b, AB=c, то $\beta_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$, где p-полупериметр.



329а) AD=$\sqrt{AB\cdot AC-BD\cdot CD}$;

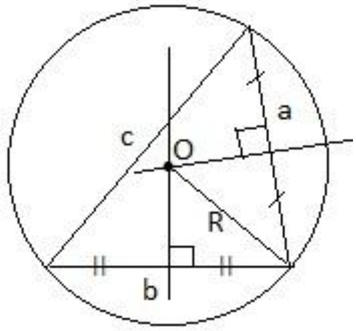
330) Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

331) Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.



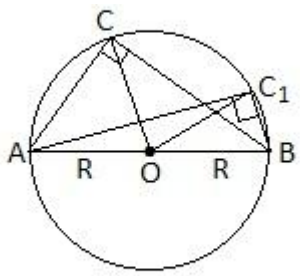
332) $S_\Delta=\frac{1}{2}P\cdot r$, где P=a+b+c, r-радиус вписанной окружности.

333) $r=\frac{2S}{a+b+c}$.



334) Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

335) $R=\frac{abc}{4S}$.

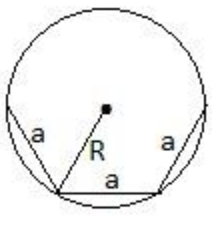


336) Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы: $R=\frac{AB}{2}$;

337) Медианы прямоугольных треугольников, проведенных к гипотенузе, равны половине гипотенузы (это радиусы описанной окружности) $OC=OC_1=R$.

<u>Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников.</u>

Окружность, описанная около правильного n-угольника.



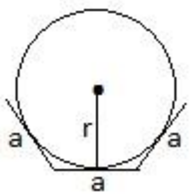
338) $R_n=\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$

339) $R_3=\frac{a}{\sqrt{3}}$;

340) $R_4=\frac{a}{\sqrt{2}}$;

341) $R_6=a$.

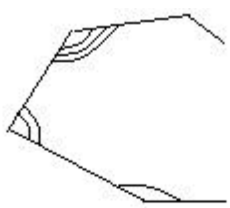
Окружность, вписанная в правильный n-угольник.



342) $r_n=\frac{a}{2\text{tg}\frac{180°}{n}}$

343) $r_3=\frac{a}{2\sqrt{3}}$;

344) $r_4=\frac{a}{2}$; **345)** $r_6=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

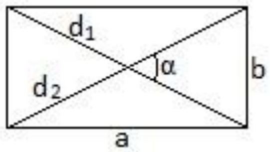


346) Сумма внутренних углов любого выпуклого n-угольника равна 180°(n-2).

347) Сумма внешних углов любого выпуклого n-угольника равна 360°.

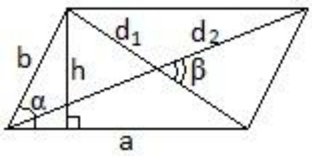
Четырехугольники.

Прямоугольник. **348)** Периметр P=2(a+b).



349) Площадь **S**=ab;
350) $d_1=d_2=d$– диагонали прямоугольника равны. $d^2=a^2+b^2$.
α – угол между диагоналями. **S** = $\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\alpha$;
351) Около любого прямоугольника можно описать окружность, центр которой – точка пересечения диагоналей; диагонали являются диаметрами окружности.

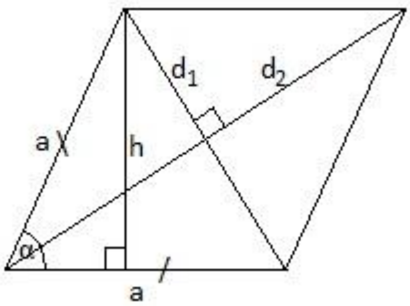
Параллелограмм.



352) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.

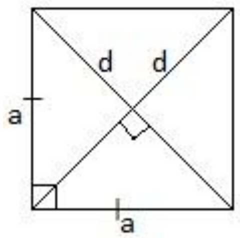
353) S=ah; **354)** S=ab·sinα;
355) S= $\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\beta$.

Ромб.



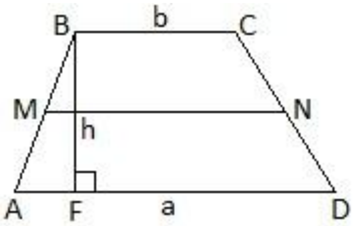
356) Все стороны ромба равны. Диагонали d_1 и d_2 являются биссектрисами углов ромба. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
357) S=ah;
358) $S=a^2\cdot\sin\alpha$;
359) S= $\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$;
360) S= $\frac{1}{2}P\cdot r$, где
P – периметр ромба, r – радиус вписанной окружности.

Квадрат.



361) Все стороны квадрата равны, диагонали квадрата равны и пересекаются под прямым углом.
362) Диагональ квадрата $d=a\sqrt{2}$;
363) $S=a^2$; **364)** S = $\frac{1}{2}d^2$.

Трапеция.



Основания трапеции AD||BC, MN-средняя линия

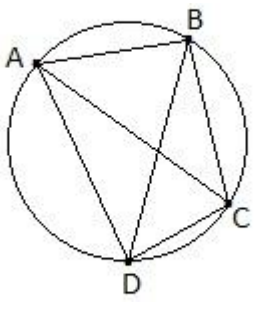
365) MN= $\frac{AD+BC}{2}$;

366) S= $\frac{AD+BC}{2}\cdot BF$ или S= $\frac{a+b}{2}\cdot h$.

367) В равнобедренной (равнобокой) трапеции длины боковых сторон равны; углы при основании равны.

368) Площадь любого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:
S= $\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\beta$.
369) Площадь любого четырехугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности:
S= $\frac{1}{2}P\cdot r$.

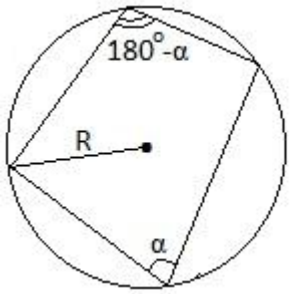
Вписанные и описанные четырехугольники.



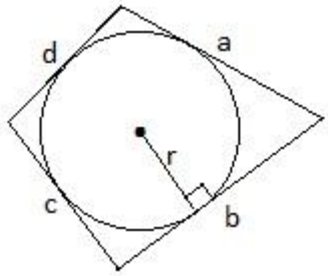
370) В выпуклом четырехугольнике, вписанном в круг, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

AC·BD=AB·DC+AD·BC.

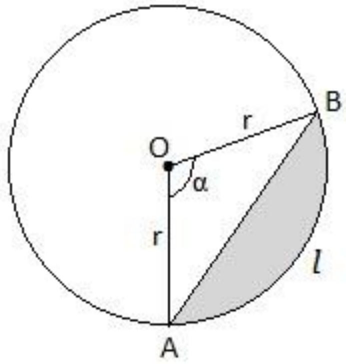
371) Если суммы противолежащих углов четырехугольника равны по 180°, то <u>около четырехугольника можно описать окружность</u>. Обратное утверждение также верно.



372) Если суммы противолежащих сторон четырехугольника равны (a+c=b+d), то <u>в этот четырехугольник можно вписать окружность.</u> Обратное утверждение также верно.



<u>Окружность, круг.</u>



373) Длина окружности $C=2\pi r$;

374) Длина дуги AB: $l=\frac{\pi r}{180°}\cdot\alpha$;

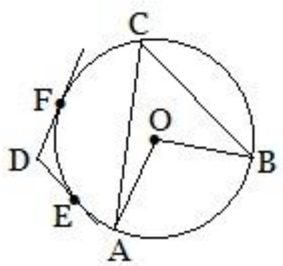
375) Площадь круга $S=\pi r^2$;

376) Площадь сектора AOB: $S=\frac{\pi r^2}{360°}\cdot\alpha$;

377) Площадь сегмента (выделенная область): $S=\frac{\pi r^2}{360°}\cdot\alpha \pm S_\Delta$ (S_Δ-это S_{AOB}). («-» берут, если α<180°; «+» берут, если α>180°), ∠AOB=α – центральный угол. Дуга *l* видна из центра O под углом α.

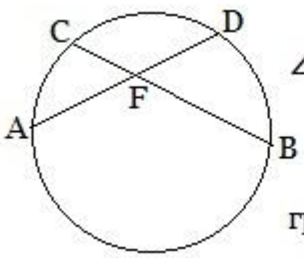
<u>Углы в круге. Измерение углов в круге.</u>

378) AC и BC – хорды. Угол ACB-вписанный. $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$. ∠ACB измеряется половиной дуги (AB), на которую он опирается.



379) ∠EDF-описанный угол, образован двумя касательными, исходящими из одной точки.

380) AD и BC-хорды, которые пересекаются в точке F.



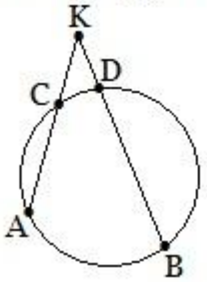
$\angle AFB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB})$

$\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{AB}$ - градусные меры дуг.

380а) CF·BF = AF·DF

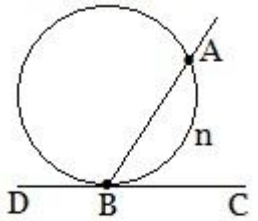
381) AK и BK-секущие.

$\angle AKB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD})$



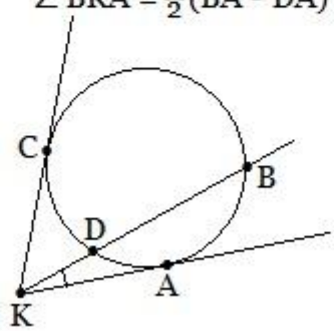
382) AB-секущая, CD-касательная.

$\angle ABC = \frac{1}{2}AnB$



$\angle CKA = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CBA} - \overset{\frown}{CDA})$

$\angle BKA = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA} - \overset{\frown}{DA})$

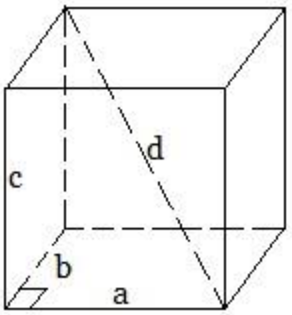


383) KB – секущая, AK и CK – касательные. AK=CK – отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны.

384) $KB\cdot KD=AK^2$ произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

МНОГОГРАННИКИ.

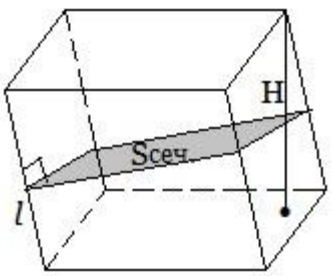
Прямоугольный параллелепипед.



385) Все грани прямоугольного параллелепипеда - прямоугольники. a, b, c – линейные размеры прямоугольного параллелепипеда (длина, ширина, высота).
386) Диагональ прямоугольного параллелепипеда $d^2=a^2+b^2+c^2$;
387) Боковая поверхность $S_{бок.}=P_{осн.}\cdot H$ или $S_{бок.}=2(a+b)c$
388) Полная поверхность $S_{полн.}=2S_{осн.}+S_{бок.}$ или $S_{полн.}=2(ab+ac+bc)$;
389) Объем прямоугольного параллелепипеда $V=S_{осн.}\cdot H$ или$V=abc$.

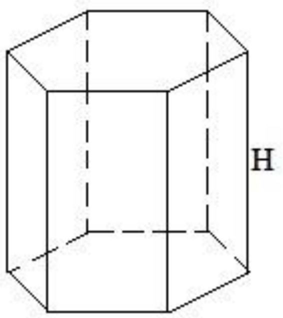
Куб.
390) Все грани куба – квадраты со стороной a.
391) Диагональ куба $d=a\sqrt{3}$.
392) Боковая поверхность куба $S_{бок.}=4a^2$; **393)** Полная поверхность куба $S_{полн.}=6a^2$;
394) Объем куба $V=a^3$.

Прямой параллелепипед (**395)** в основании лежит параллелограмм или ромб, боковое ребро перпендикулярно основанию).
396) Боковая поверхность $S_{бок.}=P_{осн.}\cdot H$. **397)** Полная поверхность $S_{полн.}=2S_{осн.}+S_{бок.}$
398) Объем прямого параллелепипеда $V=S_{осн.}\cdot H$.
Наклонный параллелепипед. **399)** В основании параллелограмм или прямоугольник или ромб или квадрат, а боковые ребра НЕ перпендикулярны плоскости основания.

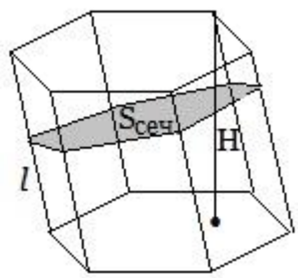


400) Объем $V=S_{осн.}\cdot H$;

401) Объем $V=S_{сеч.}\cdot l$, где l-боковое ребро, $S_{сеч.}$-площадь сечения наклонного параллелепипеда, проведенного перпендикулярно боковому ребру l.

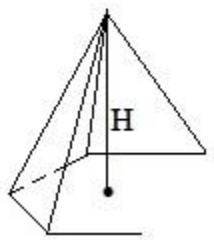


Прямая призма.
402) $S_{бок.}=P_{осн.}\cdot H$;
403) $S_{полн.}=2S_{осн.}+S_{бок.}$;
404) $V=S_{осн.}\cdot H$.



Наклонная призма.
405) $V=S_{осн.}\cdot H$;
406) $V=S_{сеч.}\cdot l$, где l-боковое ребро, $S_{сеч.}$-площадь сечения, перпендикулярного боковому ребру l.

Пирамида.



407) боковая поверхность $S_{бок.}$ равна сумме площадей боковых граней пирамиды;
408) полная поверхность $S_{полн.}=S_{осн.}+S_{бок.}$;
409) объем $V= –S_{осн.}\cdot H$.
410) У правильной пирамиды в основании лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проектируется в центр этого многоугольника, т. е. в центр описанной и вписанной окружностей.
411) Апофема l –это высота боковой грани правильной пирамиды.
Боковая поверхность правильной пирамиды $S_{бок.}= –P_{осн.}\cdot l$.

Теорема о трех перпендикулярах (ТТП).

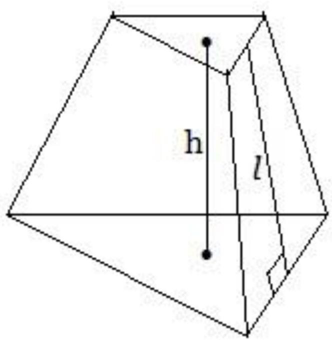
412) Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной.

413) Обратная теорема. Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.

414) Площади двух подобных фигур относятся друг к другу, как квадраты их линейных размеров

415) Объемы двух подобных тел относятся друг к другу, как кубы их соответствующих линейных размеров.

Усечённая пирамида.

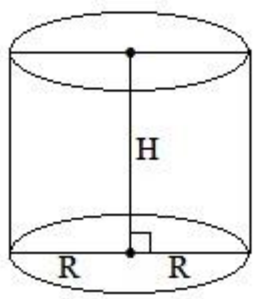


416) Если S и s соответственно площади оснований усечённой пирамиды, то объем любой усечённой пирамиды $V=-(S+\sqrt{Ss}+s)$, где h-высота усечённой пирамиды.

417) Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды $S_{бок.}= —— \cdot l$, где P и p соответственно периметры оснований правильной усечённой пирамиды, l-апофема (высота боковой грани правильной усечённой пирамиды).

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ.

Цилиндр.

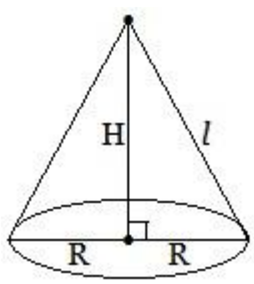


418) Боковая поверхность $S_{бок.}=2\pi RH$;

419) Полная поверхность $S_{полн.}=2\pi RH+2\pi R^2$ или $S_{полн.}=2\pi R(H+R)$;

420) Объем цилиндра $V=\pi R^2H$.

Конус.



421) Боковая поверхность $S_{бок.}= \pi Rl$;

422) Полная поверхность $S_{полн.}=\pi Rl+\pi R^2$ или $S_{полн.}=\pi R(l+R)$;

423) Объем конуса $V= -\pi R^2H$.

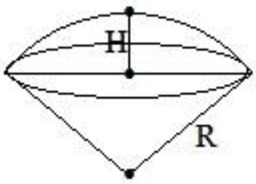
Здесь l – образующая, R - радиус основания, H – высота

Шар и сфера.

424) Площадь сферы $S=4\pi R^2$; **425)** Объем шара $V = -\pi R^3$.

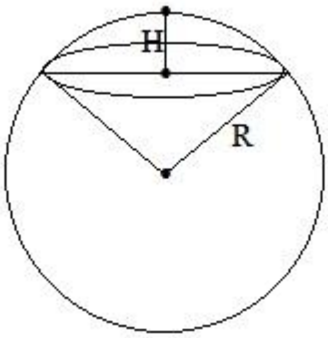
R – радиус сферы (шара).

Шаровой сектор.



426) Объем
$V=\frac{2}{\ }\pi R^{2}H$.

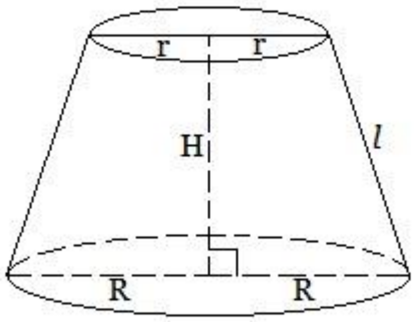
Шаровой сегмент.



427) Объем
$V=\pi H^{2}(R-\ -)$

428) Площадь сферического сегмента $S=2\pi RH$.
H – высота сферического сегмента. R – радиус сферы.

Усечённый конус.



429) Боковая поверхность усеченного конуса $S_{бок.} = \pi(R+r)l$, где R и r - радиусы оснований, l - образующая усечённого конуса.

430) Полная поверхность усечённого конуса $S_{полн.}=S_{бок.}+\pi R^2+\pi r^2$.

431) Объем усечённого конуса $V = -\pi H(R^2 + Rr + r^2)$.

Основные формулы математики 7-11
(https://mathematics-repetition.com)